Schrittweise Modellierung mit dem Euler-Verfahren 16.11.23

2) Versuch 7 (Wasserheber mit zwei Gefäßen)

Parameter: Startwert 1: 100 ml

~~Startwert 2: 0 ml~~ (Gefäß 2 war im Experiment leer)

gehobener Anteil: $x = 5\,\% = 0{,}05$

Berechnung „von Hand":

Hebung	Menge 1 vor H. in ml	Menge 2 vor H. in ml	geh. Menge 1 in ml	geh. Menge 2 in ml	Menge 1 nach Heb. in ml	Menge 2 nach Heb. in ml
1.	100	0	$100 \cdot x = 5$	$0 \cdot x = 0$	$100 - 5 + 0 = 95$	$0 - 0 + 5 = 5$
2.	95	5	$95 \cdot x = 4{,}75$	$5 \cdot x = 0{,}25$	$95 - 4{,}75 + 0{,}25 = 90{,}5$	$5 - 0{,}25 + 4{,}75 = 9{,}5$
3.	90,5	9,5	$90{,}5 \cdot x = 4{,}525$	$9{,}5 \cdot x = 0{,}475$	$90{,}5 - 4{,}525 + 0{,}475 = 86{,}45$	$9{,}5 - 0{,}475 + 4{,}525 = 13{,}55$
4.	86,45	13,55	4,3225	0,6775	82,805	17,195
5.	82,805	17,195	4,14025	0,85975	79,5245	20,4755

Berechnet mit Excel (oder Geogebra oder TR):

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hebung	M1 vor	M2 vor	H1	H2	M1 nach	M2 nach
2	1	100	0	5	0	95	5
3	2	95	5	4,75	0,25	90,5	9,5
4	3	90,5	9,5	4,525	0,475	86,45	13,55
5	4	86,45	13,55	4,3225	0,6775	82,805	17,195
6	5	82,805	17,195	4,14025	0,85975	79,5245	20,4755

Dazu notwendige Parameter (Schieberegler): SW, p

prozentualer Anteil, „Prozentsatz", x

Startwert

Dazu notwendige Formeln:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Anz...	Füll...		Hebung	M1 vor	M2 vor	geh. M 1	geh. M 2	M1 nach	M2 nach
2	0			1	=SW	0	=E2·p	=F2·p	=E2-G2+H2	=F2-H2+G2
3	5	44		2	=I2	=J2	=E3·p	=F3·p	=E3-G3+H3	=F3-H3+G3
4	10	39		3	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	15			4						

Tipp in eigenen Worten: Gehe wie folgt vor:

Modellierung von Temperaturverläufen und Vorhersage einer Endtemperatur 16.11.23

Bei den Wasserheber-Versuchen entstanden exponentielle Zeitverläufe, weil die Mange an gehobenem Wasser proportional zur Menge an vorhandenem Wasser war. Ähnliche Phänomene findet man auch in der Natur, z.B. radioaktiver Zerfall, durch Luft oder Wasser gedämpfte Schwingung, usw. Insbesondere wollen wir uns die Erwärmung und Abkühlung eines Körpers ansehen, da dies für den Klimawandel Relevanz hat (sich erwärmende Erde).

Mit dem Eulerverfahren kann man folgende Temperaturverläufe einfach modellieren:

A Erwärmung von Wasser in einem Wasserkocher konstanter Leistung.

Nach kurzer Anlaufphase steigt hier die Temperatur linear an, da in jedem Zeitanschnitt Δt dem Wasser dieselbe Menge an thermischer Energie ΔE_{therm} zugeführt wird. Dies führt gemäß folgendem Zusammenhang zu einer Zunahme um dieselbe Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = k =$ konst.:

$$\Delta E_{therm} = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$$

(Wird demnächst in Physik unterrichtet, siehe S. 78 im Buch: m = Masse, c = Wärmekapazität)

B Erwärmung oder Abkühlung eines Körpers auf Umgebungstemperatur

Befindet sich ein Körper mit Temperatur ϑ_K in einer Umgebung mit anderer Temperatur ϑ_U (z.B. eine heiße Tasse Tee oder eine kalte Cola aus dem Kühlschrank in einem Zimmer mit 20 °C oder ein ungeheiztes Haus bei Nacht/Sommer/Winter, etc.), so wird dem Körper in jedem Zeitschritt Δt eine Temperaturänderung $\Delta\vartheta$ „zugefügt" bzw. „entzogen", die proportional zur Temperaturdifferenz $\vartheta_U - \vartheta_K$ ist. Es gilt also in jedem Zeitschritt.

$$\Delta\vartheta = p\,(\vartheta_U - \vartheta_K)$$

Dabei ist p wie beim Wasserheber eine konstante, die einen proportionalen Anteil (bzw. „Prozentsatz") beschreibt.

C eine Kombination aus beiden

Wir führen folgenden Versuch durch, um die Endtemperatur eines Körpers vorherzusagen:

Phase 1: Ein Aluminiumklotz (den wir später verwenden werden, um zu messen, wie viel Energie die Sonne auf die Erde strahlt) wird für einige Zeit von einer Lampe bestrahlt und erwärmt sich.

Phase 2: Der Klotz kühlt wieder ab auf Zimmertemperatur. Hier gilt wie bei B angegeben:

$$\Delta\vartheta = p\,(\vartheta_U - \vartheta_K)$$

In Phase 1 gilt zu Beginn wie bei A angegeben $\Delta\vartheta = k$. Sobald sich der Körper jedoch erwärmt hat, gibt er Energie an die Umgebung ab (wie in B) es ergibt sich also in Kombination:

Aufgabe: Modelliere nacheinander in derselben Datei: (Merke Dir jeweils die Formeln auf dem AB)

A konstante Zunahme der Temperatur eines Körpers mit Anfangstemp. ϑ_U (Parameter k und TU).
B Abkühlung eines Körpers mit Anfangstemp. ϑ_A (zusätzliche Parameter p und TA).
C Kombination während Phase 1: Ergänzung der Temperaturänderung um $\Delta\vartheta = k$ in Phase 1.
D Ausdehnung von Phase 1 auf die gesamte Zeit und Vorhersage der Endtemperatur.

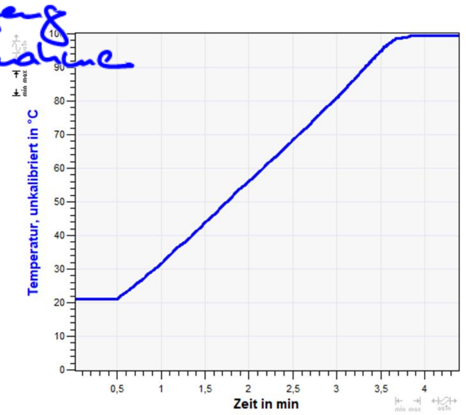
Daten zu „Modellierung von Temperaturverläufen“ 16.11.23

A Erwärmung von Wasser in einem Wasserkocher konstanter Leistung.

Parameter (Schieberegler): K, TA

TA ← Temp. am Anfang
K ← konst. Temp-Zunahme

	A	B	C
1	t in min	Temp. in °C	T-Änderung in °C
2	0	=TA	=K
3	1	=B2+C2	=K
4	2	= B3 + C3	=K

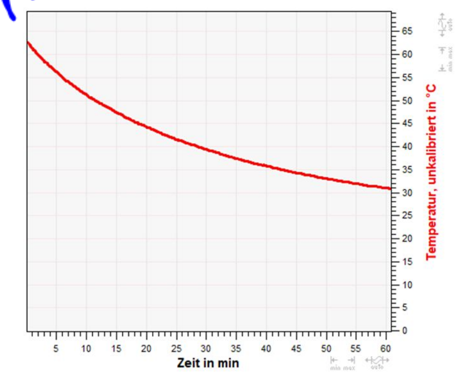


B Abkühlung eines Körpers auf Umgebungstemperatur

Parameter (Schieberegler): p, TU

TU ← Umgebungstemp.
p ← prop. Anteil

	A	B	C
1	t in min	Temp. in °C	T-Änderung in °C
2	0		
3	1		
4	2		



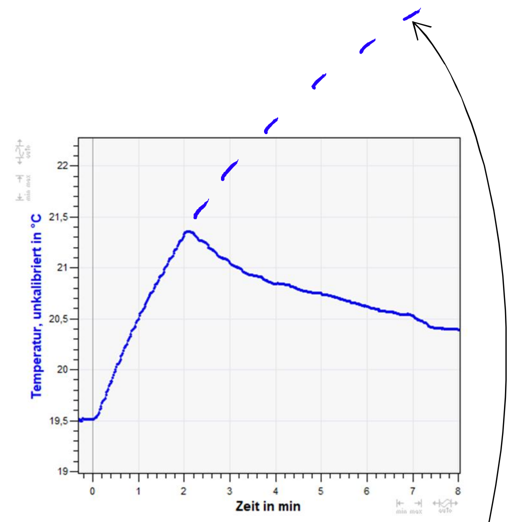
Dabei ist p wie beim Wasserheber eine Konstante, die einen proportionalen Anteil (bzw. „Prozentsatz“) beschreibt.

C eine Kombination aus beiden

Nimm an, dass die Lampe bei 10 min abgeschaltet wird.

Parameter (Schieberegler):

	A	B	C
1	t in min	Temp. in °C	T-Änderung in °C
2	0		
3	1		
4	2		
...			
11	9		
12	10		
13	11		
14	12		



D Vorhersage der Endtemperatur T_E

Nach erfolgreicher Anpassung des Modells bei C: Umstellung der Formeln aus Phase 2 auf die von Phase 1.